УДК 519.6+517.977+519.85+510.5
DOI https://doi.org/10.32782/2663-5941/2026.1.2/25

***Лукань О.А.***
https://orcid.org/0009-0001-3376-554X
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

# СТОХАСТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ ДРОБОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

*У статті розглянуто новий підхід до моделювання та оптимізації логістики транспортних задач за умов невизначеності параметрів з накладеними обмеженнями. Запропоновано узагальнену нелінійну модель транспортної задачі, що поєднує переваги моделі, орієнтованої на ймовірнісно-допустимий розв'язок та моделі, орієнтованої на ранжування інтервальних характеристик параметрів.*

*На відміну від класичних формулювань, у яких досліджується або є перевизначеною або недовизначеною логістична задача, або частковий випадок лінійної моделі з введеною оціночною функцією, у цій роботі сформовано підхід до оптимізації відношення для випадку заданих парних функцій, що приводить до побудови нелінійного ймовірнісного розв'язку.*

*Для описаної задачі виведено релевантні оціночні складові ймовірнісних обмежень згідно накладених умов, щодо характеристик логістики та введених відношень впорядкування. Подано формальні оцінки існування одного розв'язку, заданої кількості розв'язків, та відсутності розв'язку проблеми взагалі.*

*Розроблено відповідні інтерпретації базової моделі: на основі узагальнених значень, на основі розподілу очікувань та гібридну модель, які разом дають можливість зважувати між собою розподіл імовірностей щодо очікувань коректності кінцевого результату.*

*Запропоновано релевантні алгоритми та обчислювальні техніки, які дозволяють розв'язувати логістичну транспортну задачу шляхом нормалізації введених параметрів та побудови ітеративних оцінок коректності розв'язків.*

*Окрему увагу приділено побудові узагальнень класичних формулювань логістичних транспортних моделей на випадок, коли одні параметри змінюються залежно/незалежно від інших, що дозволяє моделювати реальні логістичні системи з заданими параметризованими оцінками. Розглянуто також постановку транспортної задачі за заданою змінною(параметром), коли загальні оцінки мають відповідні міні\максі характеристики.*

*Отримані результати демонструють можливість застосування нелінійного програмування для оптимізації логістичних задач у складних економічних системах, де параметри містять невизначеність та ймовірність.*

***Ключові слова:*** *нелінійне програмування, логістичні задачі, накладання обмежень, зважена модель, оптимізація.*

**Постановка проблеми.** Модель стохастичного програмування розглядає співвідношення двох нелінійних функцій та ймовірнісних обмежень в формі двох випадків. У першому випадку розглядається лише очікувана модель без урахування її змінності. В другому випадку у дисперсійній моделі змінність відіграє життєво важливу роль, не враховуючи її аналога, а саме, очікуваної моделі. Крім того, модель очікуваних значень оптимізує співвідношення двох лінійних функцій витрат, де модель дисперсії оптимізує співвідношення двох нелінійних функцій, тобто стохастичний характер у знаменнику та чисельнику, а також виконує врахування очікуваного значення та мінливості, що призводить до отримання нелінійного дробового розв'язку.

В даному дослідженні пропонується транспортна модель зі стохастичним дробовим програмуванням, підхід до сформульованої задачі, який встановлює баланс між попередніми моделями, доступними в літературі [1-7].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Як відомо, транспортна задача є однією з базових прикладних рішень щодо оптимізації процесів, яка з моменту свого виникнення набула поширення в задачах планування перевезень і управління ланцюгами постачань [1-7]. Основна увага приділяється узагальненню класичної транспортної моделі шляхом урахування невизначеності параметрів, що відображає реальні умови функціонування логістичних систем.

Значний напрям сучасних робіт пов'язаний зі стохастичними транспортними задачами, у яких попит, витрати або інші характеристики описуються випадковими величинами. Зокрема, у роботі [1] розглянуто транспортну задачу з імовірнісними обмеженнями за стохастичного попиту, де здійсненність плану перевезень оцінюється з урахуванням заданих рівнів надійності. Подальший розвиток стохастичних підходів представлено в багатоперіодних моделях перевезень, які враховують динамічні зміни попиту та структури транспортної мережі [2], а також у задачах маршрутизації та розподілу потоків за наявності кількох джерел невизначеності, пов'язаних із часом, попитом і транспортними умовами [3, 4].

Паралельно зі стохастичними постановками активно досліджуються дробові транспортні моделі, у яких оптимізується відношення певних двох показників, наприклад, прибутку до витрат. Сучасні результати в цій галузі представлені, зокрема, у роботі [5], де розглянуто багатокритеріальну стохастичну дробову транспортну задачу з вибірними параметрами, що дозволяє одночасно враховувати економічну ефективність і ризики, пов'язані з невизначеністю вхідних даних. Іншим напрямом розвитку дробових моделей є використання альтернативних форм невизначеності, зокрема нечітких параметрів, що реалізовано в багатоступеневих фракційних транспортних мережах [6].

Окрему групу сучасних досліджень становлять роботи, присвячені транспортним задачам із параметричною та динамічною структурою, у яких коефіцієнти моделі змінюються залежно від часу або зовнішніх факторів. Такі підходи застосовуються для опису реальних логістичних систем із мінливими тарифами, рівнями запасів та попитом і часто поєднуються зі стохастичними або робастними методами оптимізації [2, 7].

Разом з тим аналіз виділених публікацій свідчить, що більшість сучасних робіт зосереджується або на стохастичних транспортних моделях із лінійною цільовою функцією [1–4], або на дробових транспортних задачах без повного урахування стохастичної природи всіх ключових параметрів [6]. Моделі, у яких одночасно оптимізується відношення двох випадкових функцій із урахуванням як математичного сподівання, так і мінливості параметрів, представлені обмежено та потребують подальшого розвитку. Це зумовлює актуальність побудови стохастичної дробової транспортної моделі, що поєднує переваги існуючих підходів і дозволяє збалансувати очікувану ефективність та ризик у задачах логістичного планування.

**Постановка завдання.** Метою статті є комплексний аналіз стохастичних та параметричних аспектів транспортних задач, у яких ключові параметри – попит, витрати перевезення, прибутковість та інші логістичні характеристики – мають випадкову або динамічну природу.

Дослідження спрямоване на виявлення проблем, що виникають під час моделювання та оптимізації транспортних потоків за умов невизначеності, а також на розроблення формальних методів, які дозволяють підвищити точність і стійкість розв'язків у таких задачах. Окрему увагу приділено формуванню стохастично-дробової моделі, яка поєднує середнє значення та дисперсію випадкових величин, а також забезпечує більш збалансоване управління логістичними процесами в умовах ризику.

Додатковою задачею дослідження є розроблення та обґрунтування алгоритмічних підходів, зокрема методу послідовного лінійного програмування, що дозволяють реалізувати запропоновані моделі. Реалізація поставленої мети здійснюється шляхом отримання детермінованих еквівалентів імовірнісних обмежень, побудови моделей типу «середнє–дисперсійне», а також імплементації обчислювального алгоритму для знаходження оптимальних регламентів перевезень. Запропонований автором підхід має суттєві переваги порівняно з класичними методами, оскільки забезпечує врахування стохастичної природи даних та забезпечує більш ефективне прийняття рішень у логістичних системах, що функціонують в умовах змінних та неповних даних.

**Виклад основного матеріалу. Формальне обґрунтування процесу побудови розв'язку транспортної задачі без обмежень на потоки у мережі.**

Стохастичне дробове програмування пропонує спосіб планування в ситуаціях, коли дані задачі невідомі з певністю. Такі умови виникають тоді, коли технологічні аспекти досліджуваної системи можуть бути надзвичайно складними або такими, що не підлягають повному спостереженню. Стохастичне програмування та дробове програмування становлять дві з найдинамічніших галузей досліджень в оптимізації. Обидві сфери перетворилися на напрями зі сталою математичною базою, надійними алгоритмами й програмним забезпеченням, а також численними застосуваннями, що й далі випробовують сучасні обчислювальні ресурси. З низки причин ці напрями розвивалися незалежно один від одного. Багато наявних процедур, важливих для практичного розв'язування задач стохастичного та дробового програмування, значною мірою спираються на спрощувальні припущення.

Лінійна стохастична дробова задача програмування з обмеженнями передбачає оптимізацію відношення двох лінійних функцій за наявності певних обмежень, при цьому щонайменше одна з даних задачі має стохастичну природу, а змінні підлягають невід'ємним обмеженням. Крім того, частина обмежень може бути детермінованою.

У цій статті розглядається спеціальний клас транспортних задач, в яких стохастичне дробове програмування використовується як зручний інструмент для оптимізації. Зазначений спеціальний клас транспортних задач з необмеженою пропускною здатністю має дві окремі матриці витрат; витрати в задачі є випадковими за природою й вважаються такими, що підпорядковуються нормальному розподілу, а вектор попиту також є випадковим і моделюється ймовірнісними розподілами (зокрема нормальним та рівномірним). Запропонована модель "середнє–дисперсія" спрямована на оптимізацію відношення прибутку до вартості перевезень в умовах невизначеності за наявності стандартних обмежень постачання та стохастичних обмежень на попит, тобто, по суті, оптимізується рентабельність.

Розглянемо розподіл одного однорідного товару з m джерел до n пунктів призначення; попит у кожному з n пунктів є випадковою величиною. Транспортна задача без обмежень на пропускну здатність у межах лінійної стохастичної дробової задачі програмування у просторі критеріїв визначається так:

$$maximize R(X)=\frac{N(X)+\alpha}{D(X)+\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_{ij}+\alpha}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\beta}, \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i,\ i=1,2,\ldots,m. \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le r_{ij},\ j=1,2,\ldots,n. \quad (3)$$

де $0\le X_{m\times n}=x_{ij}\in R^{m\times n}$ є допустимою множиною, $S=\{X|(2)-(3),\ X\ge 0,\ X\in R^{m\times n}\}$ є непорожньою, опуклою та компактною множиною в $R^{m\times n}$, $x_{ij}$ – невідома кількість товару, що відправляється з пункту постачання *i* до пункту споживання *j*, $N_{m\times n}=p_{ij}$ – матриця прибутків, яка визначає прибуток $p_{ij}\sim N\left(u_{p_{ij}},\ s^2_{p_{ij}}\right)$, отриманий від доставки з *i* до *j*, $D_{m\times n}=c_{ij}$ – матриця витрат, яка визначає вартість $c_{ij}\sim N\left(u_{c_{ij}},\ s^2_{c_{ij}}\right)$ на одиницю відвантаження з *i* до *j*. Знаменник функції $D(X)+\beta$ вважається додатним у всій області обмежень. Скалярні коефіцієнти $\propto$ та $\beta$ визначають сталі складові прибутку та витрат відповідно. Кожен пункт постачання *i* має запас у $a_i$ одиниць, а стохастичний пункт попиту *j* має отримати частину не менше ніж $1-l_j$ від $r_j$ одиниць, а $1-l_j\left(0<l_j<1\right)$ – найменша ймовірність, з якою задовольняється *j*–те стохастичне обмеження попиту.

Стохастичне рівняння можна записати у такій формі:

$$Pr\left[\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge r_j\right]\ge 1-l_j,\ \ j=1,2,\ldots,n, \quad (4)$$

$$Pr\left[\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le r_j\right]\ge 1-l_j,\ \ j=1,2,\ldots,n. \quad (5)$$

Доцільним є припустити, що:

1. Усі значення пунктів постачання та попиту є додатними.
2. Загальний обсяг постачання не менший за загальний попит.
3. Нецілочислові розв'язки є прийнятними.

Нехай $r_j$ – випадкова величина в обмеженні (4), що підпорядковується нормальному розподілу з математичним сподіванням $N\left(u_{r_j},\ s_{r_j}^2\right),\quad j=1,2,\ldots,n,$
де $u_{r_j}$ є $j$–те середнє та $s_{r_j}^2$ є $j$–та дисперсія. $j$–те детерміністичне обмеження попиту (4) може бути записане як:

$$Pr\left[\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq r_j\right] \geq 1-l_j \ \textit{або}\ Pr\left[r_j \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right] \geq 1-l_j \ \textit{або} \tag{6}$$

$$Pr\left(Z_j \leq z_j\right) \geq 1-l_j\,,$$

де $Z_j = \dfrac{\left(r_j - u_{r_j}\right)}{s_{r_j}}$ слідує стандартному нормальному розподілу та $z_j = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - u_{r_j}\right)}{s_{r_j}}$.

Отже, $\phi\left(z_j\right) \geq \phi\left(K_{1-l_j} s_{r_j}\right)$, де $1-l_j = \phi\left(K_{1-l_j}\right)$ – це кумулятивна функція розподілу стандартного нормального розподілу. Очевидно, що $\phi(.)$ є незменшуваною неперервною функцією, отже $z_j \geq K_{1-l_j}$. $j$–те детерміноване обмеження попиту (4) має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j} \tag{7}$$

Подібно до обмеження (7), з (5) можна отримати обмеження, наведене нижче:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j} \tag{8}$$

Нерівності (7) і (8) можна об'єднати наступним чином:

$$u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j} \tag{9}$$

Якщо $r_j$ є рівномірною випадковою величиною, що змінюється в інтервалі від $u_j^{low}$ до $u_j^{up}$, тобто $r_j \sim U\left(u_j^{low},\ u_j^{up}\right)$, тоді ймовірнісне обмеження попиту в системі (1) еквівалентне $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq \tau_j$, де $l_j^{'} = 1-l_j$, та $\int_{\tau_j}^{u_j^{up}} \left(\dfrac{dx}{\left(u_j^{up} - u_j^{low}\right)}\right) = l_j^{'}$, тобто, $\tau_j = l_j u_j^{up} + l_j^{'} u_j^{low}$. Отже, детермінований еквівалент $j$–го ймовірнісного обмеження попиту (4) є

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq l_j u_j^{up} + l_j^{'} u_j^{low} \tag{10}$$

Подібно до (10), з (5) можна отримати обмеження, наведене нижче:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq l_j u_j^{low} + l_j^{'} u_j^{up} \tag{11}$$

Обмеження (10) і (11) можна об'єднати наступним чином

$$l_j u_j^{up} + l_j^{'} u_j^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq l_j u_j^{low} + l_j^{'} u_j^{up} \tag{12}$$

Якщо загальна пропозиція лежить у межах інтервалу загального детермінованого попиту, тоді транспортна задача стохастичного дробового програмування має допустимі розв’язки.

*Випадок 1.*

Для нормально розподіленого попиту виконується

$$\sum_{j=1}^{n}\left(u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n}\left(u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}\right).$$

*Випадок 2.*

Для рівномірно розподіленого попиту виконується

$$\sum_{j=1}^{n}\left(l_j u_j^{up} + l_j^{'} u_j^{low}\right) \le \sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{j=1}^{n}\left(l_j u_j^{low} + l_j^{'} u_j^{up}\right).$$

Можна припустити, що:

1.Транспортна задача стохастичного дробового програмування завжди має допустимий розв'язок, тобто множина $S$ непорожня.

2. Множина допустимих розв'язків є обмеженою.

3. Транспортна задача стохастичного дробового програмування розв'язна.

Доведення зазначених властивостей для випадку, коли попит має нормальний розподіл, є таким: нехай $x_{ij}^{*}$ визначається як

$$\frac{a_i\left(u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j}\right)}{T_1} \le x_{ij}^{*} \le \frac{a_i\left(u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}\right)}{T_2}, \quad i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n, \tag{13}$$

де $T_1 = \sum_{j=1}^{n}\left(u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j}\right)$ та $T_2 = \sum_{j=1}^{n}\left(u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}\right)$ є додатними.

Підставляючи $x_{ij}^{*}$ замість обмежень попиту та пропозиції, тобто з обмежень (2) та (4), можна отримати наступне:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{*} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i\left(u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j}\right)}{T_1} = \frac{a_i}{T_1}\sum_{j=1}^{n}\left(u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j}\right) = a_i, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{*} \ge \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i\left(u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}\right)}{T_2} = \frac{a_i}{T_2}\sum_{j=1}^{n}\left(u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}\right) = a_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

і, отже, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{*} = a_i$. З (13) можна отримати

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i\left(u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j}\right)}{T_1} \le \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{*} \le \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i\left(u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}\right)}{T_2}, \tag{15}$$

$$\frac{\left(u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j}\right)}{T_1}\sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{*} \le \frac{\left(u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}\right)}{T_2}\sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j} \le \frac{\left(u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j}\right)}{T_1}\sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{*} \le \frac{\left(u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}\right)}{T_2}\sum_{i=1}^{m} a_i \le u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}$$

$$u_{r_j} + K_{1-l_j} s_{r_j} \le \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{*} \le u_{r_j} + K_{l_j} s_{r_j}, \qquad j = 1,2,\ldots,m,$$

Отже, обмеження (2) і (4) задовольняються $x_{ij}^{*}$.

Оскільки з припущення з встановлених припущень та накладених обмежень випливає, що $x_{ij}^{*} > 0$, $i = 1,2,\ldots,m,$ $j = 1,2,\ldots,n,$ то тоді стає очевидним, що $x^{*} = \left(x_{ij}^{*}\right)$ є можливим розв'язком транспортної задачі стохастичного дробового програмування. Таким чином, доведено, що множина $S$ непорожня.

Далі,зобмежень(2),(9)та(12)разомзобмеженняминевід'ємності,випливає,що $0 \le x_{ij}^{*} \le a_i$, $i = 1,2,\ldots,m,$ $j = 1,2,\ldots,n.$

Математичне сподівання та дисперс $\lambda \in R$ ія функцій прибутку та витрат ймовірнісної дробової цільової функції визначаються наступним чином:

$$E\left(N(X)\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E\left(p_{ij}\right) x_{ij} + \alpha = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{p_{ij}} x_{ij} + \alpha,$$

$$E\left(D(X)\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E\left(c_{ij}\right) x_{ij} + \beta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{c_{ij}} x_{ij} + \beta,$$

$$V\left(N(X)\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} V\left(p_{ij}\right) x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} S_{p_{ij}}^{2} x_{ij,}^{2} \tag{16}$$

$$V\left(D\left(X\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}V\left(c_{ij}\right)x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^{2}x_{ij}^{2}.$$

Отже, детермінована дробова цільова функція має такий вигляд:

$$R^{EV}\left(X\right)=\frac{w1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}+\alpha\right)+w2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^{2}x_{ij}^{2}}}{w1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x_{ij}+\beta\right)+w2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^{2}x_{ij}^{2}}}\ . \quad (17)$$

де *w1* та *w2* – заздалегідь вибрані невід'ємні числа, що вказують на відносну важливість для оптимізації середнього значення та квадратного кореня матриці дисперсії–коваріації. Особливі випадки, що відповідають *w1=0* та *w2=0*, відповідно, називають E–моделлю та V–моделлю.

Цільова функція (17) є дуже відомою моделлю середнього відхилення.

Оскільки функції чисельника і знаменника дробової цільової функції (17) є стохастичними функціями, побудованими на основі математичного сподівання випадкових параметрів, є опуклими, а знаменник вважається додатним на обмеженій множині S, це означає, що дробова цільова функція $R^{EV}\left(X\right)$ також обмежена на цій множині S, а отже, можна зробити висновок, що транспортна задача стохастичного дробового програмування є розв'язною.

E–модель для нерозподіленої (неконтрольованої) транспортної задачі LSFP, коли попит відповідає нормальному розподілу, виглядає наступним чином

$$maximize\ \ P^{E}\left(X\right)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}+\alpha}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x_{ij}+\beta'} \quad (18)$$

$$\text{за умови: } \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_{i},\ \ i=1,2,\ldots,m$$

$$u_{r_j}+K_{1-l_j}s_{r_j}\le\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le u_{r_j}+K_{l_j}s_{r_j}\ \ ,\ \ j=1,2,\ldots,n,$$

де $0\le X_{m\times n}=x_{ij}\in R^{m\times n}$ є допустимою множиною, $S=\{X|\left(2\right)ma\left(7\right),\ X\ge0,\ X\in R^{m\times n}\}$ – непорожня, опукла та компактна множина у $R^{m\times n}$, $x_{ij}$ – невідома кількість товару, що транспортується з пункту постачання *i* до пункту призначення *j,* $R^{E}\left(X\right)$ – дробова цільова функція, визначена як відношення функції прибутку до функції вартості. Прибуткова та вартісна функції вважаються додатними в усій області обмежень. Пункт постачання *i* має не більше ніж $a_i$ одиниць, а детермінований пункт попиту *j* повинен отримати щонайменше $u_{r_j}+K_{1-l_j}s_{r_j}$ одиниць і не більше ніж $u_{r_j}+K_{l_j}s_{r_j}$ . Аналогічно можна визначити E–модель системи (1), коли попит підпорядковується рівномірному та/або нормальному розподілу.

Вище викладене подається з визначенням функції $R^{E}\left(.\right)$ як дробової цільової функції.

1) $R^{E}\left(\lambda\right)$ є опуклою функцією для.
2) $R^{E}\left(\lambda\right)$ є строго спадною функцією на $R$ .
3) $R^{E}\left(\lambda\right)$ є неперервною функцією на $R$ .
4) Рівняння $R^{E}\left(\lambda\right)=0$ має єдине розв’язання, позначене як $\lambda^{*}$ .
5) $R^{E}\left(\lambda\right)\ge0$ для всіх $x\in S.$

Необхідна та достатня умова для

$$\lambda^{*}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}^{*}+\alpha}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x_{ij}^{*}+\beta}=\underset{x\in S}{maximize}\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}+\alpha}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x_{ij}+\beta} \quad (19)$$

є

$$R^{E}\left(\lambda^{*}\right)=R^{E}\left(x^{*},\lambda^{*}\right)=\underset{x\in S}{maximize}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}+\alpha-\lambda^{*}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x_{ij}+\beta\right)\right]=0. \quad (20)$$

Слід зазначити, що оптимальний розв’язок $x^{*}$ може бути не єдиним для крайніх випадків (тобто максимуму або мінімуму $max/_{min}$). V–модель для нерозподіленої транспортної задачі стохастичного дробового програмування, коли попит розподіляється за нормальним законом, має такий вигляд:

$$maximize\, R^V\left(X\right)=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^2 x_{ij,}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^2 x_{ij}^2}} \tag{21}$$

за умови: $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i,\quad i=1,2,\dots,m\quad u_{r_j}+K_{1-l_j}s_{r_j}\le\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le u_{r_j}+K_{l_j}s_{r_j}\ ,\quad j=1,2,\dots,n,$ де $0\le X_{m\times n}=x_{ij}\in R^{m\times n}$ є допустимою множиною, $S=\{X|\left(2.2\right)and\left(3.4\right),\ X\ge 0,\ X\in R^{m\times n}\}$ – непорожня, опукла та компактна множина у $R^{m\times n}$, $x_{ij}$ – невідома кількість товару, що транспортується з пункту постачання *i* до пункту призначення *j*, $R^V\left(X\right)$ – дробова цільова функція, яка визначається як відношення стандартного відхилення функції прибутку до стандартного відхилення функції витрат, функція прибутку та витрат вважається додатною в межах множини обмежень, точка постачання *i* повинна мати не більше $a_i$ одиниць, а детермінований пункт попиту *j* повинен отримати не менше ніж $u_{r_j}+K_{1-l_j}s_{r_j}$ одиниць і не більше ніж $u_{r_j}+K_{l_j}s_{r_j}$. Аналогічно можна визначити V–модель системи, коли попит підпорядковується рівномірному та/або нормальному розподілу.

Наступні твердження є істинними:

1) $R^{V2}\left(X\right)$ є опуклою функцією для $\lambda\in R$.
2) $R^{V2}\left(X\right)$ є строго спадною функцією на $R$.
3) $R^{V2}\left(X\right)$ є неперервною функцією на $R$.
4) Рівняння $R^{V2}\left(X\right)=0$ має єдиний розв'язок $\lambda^*$.
5) $R^{V2}\left(X\right)\ge 0$ для всіх $x\in S$.

Необхідна та достатня умова істинності сформульованих тверджень буде:

$$\lambda^*=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^2 x_{ij}^{2*}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^2 x_{ij}^{2*}}=\underset{x\in S}{maximize}\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^2 x_{ij}^2}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^2 x_{ij}^2} \tag{22}$$

є

$$R^{V2}\left(\lambda^*\right)=R^{V2}\left(x^*,\lambda^*\right)=\underset{x\in S}{optimize}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^2 x_{ij}^2-\lambda^*\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^2 x_{ij}^2\right]=0 \tag{23}$$

Слід зазначити, що оптимальний розв'язок $x^*$ може бути не єдиним для крайніх випадв (тобто максимуму або мінімуму $^{max}/_{min}$). Модель середньої дисперсії для нерозподіленої транспортної задачі стохастичного дробового програмування, коли попит розподіляється за нормальним законом, записується як:

$$maximize\, R^{EV}\left(X\right)=\frac{w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}+ff\right)+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^2 x_{ij}^2}}{w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x_{ij}+fi\right)+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^2 x_{ij}^2}}. \tag{24}$$

за умови: $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i,\quad i=1,2,\dots,m\quad u_{r_j}+K_{1-l_j}s_{r_j}\le\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le u_{r_j}+K_{l_j}s_{r_j}\ ,\quad j=1,2,\dots,n,$ де $0\le X_{m\times n}=x_{ij}\in R^{m\times n}$ є допустимою множиною, $S=\{X|\left(2\right)and\left(9\right),\ X\ge 0,\ X\in R^{m\times n}\}$ – непорожня, опукла та компактна множина у $R^{m\times n}$, $x_{ij}$ – невідома кількість товару, що транспортується з пункту постачання *i* до пункту споживання *j*. Аналогічно можна визначити середню модель та дисперсійну модель для системи, коли попит має рівномірний та/або нормальний розподіл.

Необхідною та достатньою умовою існування розв'язку буде:

$$\lambda^*=\frac{w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x^*_{ij}+\alpha\right)+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^2 x_{ij}^{2*}}}{w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x^*_{ij}+\beta\right)+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^2 x_{ij}^{2*}}} \tag{25}$$

$$=\underset{x\in S}{maximize}\frac{w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}+\alpha\right)+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^2 x_{ij}^2}}{w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x_{ij}+\beta\right)+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^2 x_{ij}^2}}\ ц$$

є

$$R^{EV}\left(\lambda^*\right)=R^{EV}\left(x^*,\lambda^*\right)=\underset{x\in S}{maximize}\left[w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}+\alpha\right)+\right.$$

$$\left.+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^2x_{ij}^2}-\lambda^*\left\{w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x_{ij}+\beta\right)+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^2x_{ij}^2}\right\}\right]=0 \quad (26)$$

Послідовне лінійне програмування для транспортної задачі стохастичного дробового програмування включатиме наступні кроки:

1) Почати з початкової точки $X^{(0)}$ та встановити номер ітерації $t=0$.

(Існує кілька способів отримати початкове наближення $X^{(0)}$. Один із них – розв'язати задачу $\underset{x\in S}{maximize}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}$ .)

2) Визначити відносну значущість середнього значення та дисперсії, шляхом присвоєння значень *w1* та *w2*.

3) Обчислити початкове значення $\lambda$ за формулою:

$$\lambda^{(0)}=\frac{w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{p_{ij}}x_{ij}+\alpha\right)+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{p_{ij}}^2x_{ij}^2}}{w_1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{c_{ij}}x_{ij}+\beta\right)+w_2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{c_{ij}}^2x_{ij}^2}}. \quad (27)$$

4) Лінеаризувати обмеження цільової функції навколо точок $\left(X^{(t)},\lambda^{(t)}\right)$ як

$$R^{EV}\left(X,\lambda\right)\approx R^{EV}\left(X^{(t)},\lambda^{(t)}\right)+\nabla R^{EV}\left(X^{(t)},\lambda^{(t)}\right)^T\left(X-X^{(t)},\lambda-\lambda^{(t)}\right)^T.$$

5) Сформулювати наближену транспортну задачу НТЗ у вигляді:

$$\underset{x\in S}{maximize}\,\lambda\ \text{за умови}\ R^{EV}\left(X^{(t)},\lambda^{(t)}\right)+\nabla R^{EV}\left(X^{(t)},\lambda^{(t)}\right)^T\left(X-X^{(t)},\lambda-\lambda^{(t)}\right)^T=0 \quad (28)$$

6) Розв'язати наближену транспортну задачу стохастичного дробового програмування, щоб отримати вектор розв'язку $X^{(t+1)}$ та скаляр $\lambda^{(t+1)}$.

7) Обчислити значення $R^{EV}\left(X^{(t+1)},\lambda^{(t+1)}\right)$.

8) Якщо $\left|R^{EV}\left(X^{(t+1)},\lambda^{(t+1)}\right)\right|\le\varepsilon$, де $\varepsilon$ – задана мала позитивна похибка, вважаємо, що всі обмеження постачання та попиту виконані. Процедуру припиняємо, вважаючи оптимальне *X* приблизно рівним $X^{(t+1)}$, тобто, $X^{opt}=X^{(t+1)}$.

9) Інакше знову лінеаризуємо обмеження цільової функції навколо точок $\left(X^{(t+1)},\lambda^{(t+1)}\right)$ як $R^{EV}\left(X,\lambda\right)\approx R^{EV}\left(X^{(t)},\lambda^{(t)}\right)+\nabla R^{EV}\left(X^{(t)},\lambda^{(t)}\right)^T\left(X-X^{(t)},\lambda-\lambda^{(t)}\right)^T$ і додаємо отримане рівняння як додаткове обмеження до транспортної задачі стохастичного дробового програмування, визначеної в пункті 4.

10) Збільшити номер ітерації на одиницю та повернутися до пункту 4.

Транспортна задача лінійного планування у класичній постановці полягає у відшуканні *оптимального плану* перевезень деякого однорідного товару з $m$ пунктів постачання $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m$ в *n* пунктів споживання $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n$. При цьому критерієм якості можуть слугувати найменші затрати на перевезення, найменша загальна тривалість усіх перевезень або найменша загальна довжина усіх перевезень. В статті мова переважно йтиме про транспортні задачі за критерієм вартості, хоча також розглянемо постановку транспортної задачі за критерієм часу.

Нехай відомими величинами є запаси $a_i(\omega)$ товару у пункті постачання $P_i$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$, потреби $b_j(\omega)$ в товарі у пункті споживання $S_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, вартості $c_{ij}(\omega)$ доставки одиниці товару (транспортні тарифи) з пункту постачання $P_i$ у пункт споживання $S_j$. Тут $\omega\in©$, $b_j(\omega)$, $c_{ij}(\omega)$, $a_i(\omega)$ – дискретні випадкові величини. Невідомими величинами вважаємо обсяги $x_{ij}$ товару, що плануються для перевезення з пункту $P_i$ у пункт $S_j$. Тоді математична модель транспортної задачі за критерієм вартості виглядає так:

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(\omega)x_{ij}\to\min, \tag{29}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i(\omega), i=\overline{1,m}, \tag{30}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j(\omega),\ j=\overline{1,n}, \tag{31}$$

$$x_{i,j}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{32}$$

Формула (29) задає обчислення сукупних витрат, пов'язаних із перевезенням товару. Обмеження (30) означають, що обсяг товару, вивезеного з кожного пункту постачання $P_i$, дорівнює його запасам. Обмеження (31) означають, що обсяг товару, ввезеного до кожного пункту споживання $S_j$, дорівнює його потребі. Ці обмеження називають *непрямими*, на відміну від прямих обмежень (32), які накладаються безпосередньо на обсяги перевезень. Очевидно, що при цьому мала б виконуватись умова балансу

$$\sum_{i=1}^{m}a_i(\omega)=\sum_{j=1}^{n}b_j(\omega)\quad\forall\omega\in\Omega. \tag{33}$$

яка означає, що пропозиція товару збігається із попитом на товар. За такої умови транспортну задачу називають *збалансованою*, або *закритою*. Якщо ця умова порушується, то говорять про *незбалансовану*, або *відкриту* транспортну задачу. Зрозуміло, що при цьому залежно від ситуації попит перевищує пропозицію ( $\sum_{i=1}^{m}a_i(\omega)<\sum_{j=1}^{n}b_j(\omega)$ ), чи навпаки ($\sum_{i=1}^{m}a_i(\omega)>\sum_{j=1}^{n}b_j(\omega)$), змінюється відповідним чином і математична модель задачі.

Зауважимо, що система (30), (31) володітиме непорожньою множиною допустимих розв'язків лише у випадку, якщо справджується умова (33). І навпаки, з існування розв'язків випливає справедливість вказаної умови, яка має окрему назву – умова балансу транспортної задачі.

Алгоритмічно мінімум цільової лінійної функції розлядуваної транспортної задачі, заданої рівнянням (29), досягатиметься на такій матриці $\mathrm{X}=\|x_{ij}\|_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$, усі елементи якої покомпонентно справджують умови балансу, невід'ємності, вивезення товару зі складів наразно та задоволення уього попиту нарізно, тобто умови (29)-(33), відповідно.

Оптимальним розв'язком задачі є матриця

$$X''=(x_{ij})_{m\times n},$$

що задовольняє системі обмежень і мінімізує цільову функцію.

У транспортній моделі (29)-(32) запаси і потреби товару та ціна транспортування товару є детермінованими характеристиками – дійсними (невід'ємними) числами. Однак, умови, за яких реально існує якась господарська система, насправді, є досить мінливі. Не завжди згадані величини є постійними. Доволі часто доводиться зважати на деяку багатопараметричну залежність коефіцієнтів цільової функції та системи обмежень. Зокрема, піддається сезонному впливу ціна на транспортні перевезення, адже на неї чинить вплив рівень завантаженості доріг. До того ж, навіть класичні попит і пропозиція функційно залежать як від часу, так і від сукупного обсягу складів.

Таким чином, додатково будемо вважати, що коефіцієнти транспортної моделі (29)-(32) є функціями від деякого параметра τ (наприклад, час), причому лінійними функціями. Дві причини такого припущення – такий випадок найлегше аналізувати та він має найбільше поширення в реальності. Це породжує задачу відшукання оптимального плану на параметричній множині $\tau\in[\tau_1,\tau_2]$

$$L_\tau(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij}(\omega)+\tau c'_{ij}(\omega)\right)x_{ij}\to\min, \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i(\omega)+\tau a'_i(\omega), i=\overline{1,m}, \tag{35}$$

ISSN 2663-5941 (Print), ISSN 2663-595X (Online)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j(\omega) + \tau b'_j(\omega),\ j = \overline{1,n}, \tag{36}$$

$$x_{i,j} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \tag{37}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\big(a_i(\omega) + \tau a'_i(\omega)\big) = \sum_{j=1}^{n}\big(b_j(\omega) + \tau b'_j(\omega)\big). \tag{38}$$

Очевидно, при $\tau = 0$ отримаємо класичну транспортну задачу (29)-(32). Відзначимо, що вхідні дані параметричної транспортної задачі (33)-(38) (вектор запасів

$$\mathrm{a}_\tau(\omega) = \big(a_1(\omega) + \tau a'_1(\omega), \ldots, a_m(\omega) + \tau a'_m(\omega)\big),$$

вектор потреб

$$\mathrm{b}_\tau(\omega) = \big(b_1(\omega) + \tau b'_1(\omega), \ldots, b_n(\omega) + \tau b'_n(\omega)\big),$$

і вектор тарифів

$$\mathrm{c}_\tau(\omega) = \big(c_{11}(\omega) + \tau c'_{11}(\omega), \ldots, c_{1n}(\omega) + \tau c'_{1n}(\omega); \ldots; c_{m1}(\omega) \pm \pm\tau c'_{m1}(\omega), \ldots, c_{mn}(\omega) + \tau c'_{mn}(\omega)\big)),$$

та вихідні дані (вектор

$$\mathrm{x}_\tau = \big(x_{11}(\tau), \ldots, x_{1n}(\tau); \ldots; x_{m1}(\tau), \ldots, x_{m2}(\tau)\big)$$

обсягів перевезень товару) можна представляти у вигляді транспортної таблиці *(матрична модель)* або у вигляді орієнтованого графа *(мережева модель)*. У роботі ми використовуватимемо транспортну таблицю такого вигляду:

Таблиця 1

**Модель транспортної таблиці з параметром.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b_1(\omega)+$ $+\tau b_{1'}(\omega)$ | | $b_2(\omega)+$ $+\tau b_{2'}(\omega)$ | | $\ldots$ | $b_n(\omega)+$ $+\tau b_{n'}(\omega)$ | |
| $a_1(\omega)+$ $+\tau a'_1(\omega)$ | $c_{11}(\omega)+$ $+\tau c_{11}'(\omega)$ | | $c_{12}(\omega)+$ $+\tau c_{12}'(\omega)$ | | $\ldots$ | $c_{1n}(\omega)+$ $+\tau c_{1n}'(\omega)$ | |
| | | $x_{11}(t)$ | | $x_{12}(\tau)$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $x_{1n}(\tau)$ |
| $a_2(\omega)+$ $+\tau a'_2(\omega)$ | $c_{21}(\omega)+$ $+\tau c_{21}'(\omega)$ | | $c_{22}(\omega)+$ $+\tau c_{22}'(\omega)$ | | $\ldots$ | $c_{2n}(\omega)+$ $+\tau c_{2n}'(\omega)$ | |
| | | $x_{21}(\tau)$ | | $x_{22}(\tau)$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $x_{2n}(\tau)$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $a_i(\omega)+$ $+\tau a'_i(\omega)$ | $c_{i1}(\omega)+$ $+\tau c_{i1}'(\omega)$ | | $c_{i2}(\omega)+$ $+\tau c_{i2}'(\omega)$ | | $\ldots$ | $c_{in}(\omega)+$ $+\tau c_{in}'(\omega)$ | |
| | | $x_{i1}(\tau)$ | $\ldots$ | $x_{i2}(\tau)$ | $\ldots$ | | $x_{in}(\tau)$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $a_m(\omega)+$ $+\tau a'_m(\omega)$ | $c_{m1}(\omega)+$ $+\tau c_{m1}'(\omega)$ | | $c_{m2}(\omega)+$ $+\tau c_{m2}'(\omega)$ | | $\ldots$ | $c_{mn}(\omega)+$ $+\tau c_{mn}'(\omega)$ | |
| | | $x_{m1}(\tau)$ | | $x_{m2}(\tau)$ | $\ldots$ | | $x_{mn}(\tau)$ |

При цьому матриці тарифів на транспортування та матрицю перевезених обсягів записують так $C_\tau = (c_{ij}(\omega) + \tau c'_{ij}(\omega))_{i,j=1}^{m,n}$ та $X_\tau = (x_{ij}(\tau))_{i,j=1}^{m,n}$ відповідно.

Довільний невід'ємний розв'язок системи обмежень (35)-(36), записаний у вигляді матриці $X_\tau = (x_{ij}(\tau))_{i,j=1}^{m,n}$ будемо називати *планом,* або *допустимим розв'язком* транспортної задачі (що відповідає значенню параметра $\tau$), а план $X_\tau^* = (x_{ij}^*(\tau))_{i,j=1}^{m,n}$, який реалізує мінімум цільової функції (34), – *оптимальним планом (розв'язком)* цієї задачі.

Важливу роль у процесі розв'язування транспортної задачі відіграє поняття опорного плану. План $X_\tau = (x_{ij}(\tau))_{i,j=1}^{m,n}$ будемо називати *опорним планом,* або *базисним розв'язком,* якщо вектори $A_{ij}$, які відповідають додатним компонентам $x_{ij}(\tau)$ цього плану, утворюють лінійно-незалежну систему). Відзначимо, що компонентами вектора $A_{ij}$ є коефіцієнти біля змінної $x_{ij}$ в системі непрямих обмежень транспортної задачі (26)-(30), тобто цей вектор має розмірність $m+n$ і такий вигляд $A_{ij} = col(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, причому перша одиниця є його $i$-ою координатою, а друга одиниця за номером є $(m+j)$-ою координатою. Вектор $A_{ij}$, називають вектором зв'язку $P_iS_j$, якому у транспортній таблиці відповідає клітинка $(i,j)$.

У транспортній задачі лінійного програмування критерієм якості плану є сумарні витрати на перевезення. У ряді ж випадків якість плану визначається не сумарними витратами, а найбільшою тривалістю окремих перевезень. Найчастіше це буває, коли під витратами розуміється час, потрібний для перевезення, а всі перевезення починаються одночасно. Тоді перевезення, на яке йде найбільше часу, визначає час реалізації плану перевезень продукту в пункти призначення. У таких задачах організації перевезень якість плану оцінюється максимальним часом, затраченим на перевезення.

Позначимо через $t_{ij}$ час, необхідний на перевезення продукту із $i$-го пункту виробництва в $j$-ий пункт споживання. Найкращим будемо вважати план, найтриваліше перевезення якого має мінімальну тривалість.

Планування за мінімумом часу здійснення найтривалішого перевезення актуальне, наприклад, при здійсненні транспортування швидкопсувних продуктів, при вивезенні зерна на заготівельні пункти під час збору врожаю. Така ж ситуація трапляється, коли весь обсяг робіт складається з обробки окремих класів деталей, які слід розподілити по різних видах верстатів, причому задана матриця часових витрат $t_{ij}$, що йдуть на обробку однієї деталі $i$-го класу на верстаті $j$-го виду. При цьому потрібно в найкоротший час виконати весь обсяг робіт.

При вибраному показнику якості задача планування перевезень, які забезпечують задоволення попиту у пунктах споживання $B_j$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ товаром, який виробляється у пунктах $A_i$ у кількості $a_i$ одиниць $(i=1,\ \ldots,\ m)$, формулюється наступним чином:

Знайти такий план перевезень $X$ (набір чисел $x_{ij}$, $i=1,\ \ldots,\ m,$ $j=1,\ \ldots,\ n$), для якого час $t(X)$ найтривалішого перевезення

$$t(X) = \max_{x_{ij}>0} t_{ij} \tag{39}$$

досягає мінімуму за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i(\omega),\ i=1,2,\ldots,m, \tag{40}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j(\omega),\ j=1,2,\ldots,n, \tag{41}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n. \tag{42}$$

Вираз (39) означає найбільше значення $t_{ij}$, тобто найтриваліше перевезення із пунктів $A_i$ у пункти $B_j$, що відповідають комунікаціям, по яких заплановані ненульові перевезення $(x_{ij}>0)$. Задача (39)-(42) не вкладається у рамки лінійного програмування, бо $t(X)$– нелінійна функція своїх змінних $x_{ij}$. Однак можна довести, що відшукання розв'язку цієї задачі може бути зведеним до послідовного розв'язування серії звичайних транспортних задач, де $c_{ij}$ приймає значення 0 або 1. При цьому оптимальний план попередньої задачі можна використовувати як початковий план наступної задачі. Також задачу (39)-(42) можна звести до серії задач про максимальний потік.

**Висновки.** У даній статті проведено дослідження стохастично-параметричних транспортних задач, у яких попит, витрати та інші логістичні параметри мають випадковий характер або залежать від зовнішнього параметра. На основі аналізу класичних та сучасних підходів сформовано узагальнену стохастичну дробову модель транспортної задачі, що поєднує оцінку математичного сподівання та дисперсії випадкових величин. Запропоновано узагальнену та середньо-дисперсійну модель, що забезпечують можливість балансування між прибутковістю, ризиком і стабільністю перевізних рішень.

Для ймовірнісних обмежень отримано детерміновані еквіваленти для випадку нормального та рівномірного розподілів, що дозволяє зменшити невизначеність у процесі планування та спростити алгоритмічну реалізацію задачі. Доведено існування допустимої множини та розв'язності транспортної задачі у стохастичному середовищі, що підкреслює теоретичну коректність і практичну придатність запропонованих моделей.

Розроблений алгоритм послідовного лінійного програмування продемонстрував ефективність у знаходженні наближених оптимальних розв'язків для стохастичної дробової транспортної задачі. Його застосування дозволяє враховувати невизначеність вхідних параметрів, здійснювати лінеаризацію складної дробової структури цільової функції та наближатися до оптимального розв'язку шляхом поетапного уточнення. Запропонована модель і алгоритмічний підхід можуть бути використані в логістичних, економічних та виробничих системах, де дані мають стохастичну або параметричну природу. Результати дослідження створюють основу для подальшого розвитку методів оптимізації, зокрема у напрямках стохастичного цілочисельного програмування, рекурсивних випадкових моделей та комбінованих транспортних задач, де важливим є поєднання надійності, ефективності та мінімізації ризиків.

**Список літератури:**

1. Tang C. H., Wang Y. W. Transportation outsourcing problems considering feasible probabilities under stochastic demands. *Computers & Operations Research*. 2021. Vol. 126. 105109. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.105109

2. Liu K., Yang L., Zhao Y., Zhang Z. H. Multi-period stochastic programming for relief delivery considering evolving transportation network and temporary facility relocation/closure. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review.* 2023. Vol. 180. 103357. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tre.2023.103357

3. Ge Y., Sun Y., Zhang C. Modeling a multimodal routing problem with flexible time window in a multi-uncertainty environment. *Systems*. 2024. Vol. 12, № 6. 212. DOI: https://doi.org/10.3390/systems12060212

4. Reusken M., Laporte G., Rohmer S. U., Cruijssen F. Vehicle routing with stochastic demand, service and waiting times – The case of food bank collection problems. *European Journal of Operational Research*. 2024. Vol. 317, № 1. P. 111–127. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.03.031

5. El Sayed M. A., Baky I. A. Multi-choice fractional stochastic multi-objective transportation problem. *Soft Computing*. 2023. Vol. 27, № 16. P. 11551–11567. DOI: https://doi.org/10.1007/s00500-023-08101-3

6. Baranidharan B., Murali G. B., Cao Z., Mahapatra G. S. Pentagonal fuzzy fractional three-stage sustainable transportation network problem incorporating extension principle. *Ain Shams Engineering Journal*. 2025. Vol. 16, № 2. 103261. DOI: https://doi.org/10.1016/j.asej.2025.103261

7. Ren X., Pan S., Zheng G. Robust optimization of multimodal transportation route selection based on multiple uncertainties from the perspective of sustainable transportation. *Sustainability*. 2025. Vol. 17, № 12. 5508. DOI: https://doi.org/10.3390/su17125508

**Lukan O.A. STOCHASTIC APPROACH TO TRANSPORTATION PROBLEMS OF FRACTIONAL PROGRAMMING**

*This paper addresses the transportation problem within a stochastic modelling framework, focusing on situations where key parameters such as demand levels and transportation costs are uncertain. The proposed approach formulates a generalized stochastic fractional transportation problem in which system performance is evaluated through the relationship between aggregated benefits and incurred costs. The model integrates complementary perspectives that account for both the expected behavior of random parameters and their dispersion, thereby allowing a more flexible representation of uncertainty.*

*In contrast to conventional formulations that either assume deterministic data or limit uncertainty treatment to linear objective structures, the developed methodology considers the optimization of a ratio involving random quantities. This leads to a nonlinear stochastic fractional optimization setting that better reflects real-world transportation systems operating under incomplete or fluctuating information.*

*To ensure practical applicability, probabilistic demand conditions are transformed into deterministic constraint representations under assumptions of normally and uniformly distributed demand. Key analytical characteristics of the resulting model are examined, including the non-emptiness of the feasible region and the existence of optimal solutions. Several alternative model configurations are introduced, enabling decision-makers to regulate the balance between stability and anticipated system performance.*

*An iterative solution strategy based on sequential linear approximation is proposed to obtain near-optimal solutions efficiently. Furthermore, the classical transportation problem is extended to a parametric form in which model coefficients depend on an external parameter, such as time. This extension allows the description of transportation systems with dynamically changing tariffs, resource availability, and demand patterns. A complementary time-oriented formulation is also discussed, where the quality of a transportation plan is assessed by minimizing the duration of the longest delivery route.*

*The obtained results confirm that stochastic fractional modelling constitutes an effective decision-support tool for transportation problems arising in complex logistical and economic environments characterized by uncertainty.*

***Keywords:*** *stochastic programming, transportation problem, fractional optimization, chance-type constraints, parametric modelling, decision-making.*

Дата першого надходження статті до видання: 09.01.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 05.02.2026
Дата публікації (оприлюднення) статті: 08.04.2026